SESSION 1983

MATHÉMATIQUES

(Options T et TA)

Épreuve n° 1 (exercices)

Durée : 4 heures

Les cinq exercices sont indépendants.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à écrire lisiblement, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, à donner de leurs affirmations des démonstrations complètes mais brèves.

EXERCICE I.

Dans un espace affine euclidien de dimension 3, rapporté au repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on définit la surface S par la représentation paramétrique:

$$(u,v) \longrightarrow \overrightarrow{OM}(u,v) = (u \cos v)\,\vec{i} + (u \sin v)\,\vec{j} + (a \sin v)\,\vec{k}\ ,$$

$(u,v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, a étant un réel > 0 donné.

1°) Pour u fixé soit C_u la courbe de représentation paramétrique:
$v \longrightarrow \overrightarrow{OM}(u,v)$, $v \in [0,2\pi]$.

Montrer que pour $u \neq 0$, C_u est une courbe plane et préciser une équation de son plan.

Donner une équation de la projection de C_u sur le plan $(0,\vec{i},\vec{j})$ et préciser la nature de C_u.

Que devient C_u pour u = 0?

2°) Soit L l'intersection de S et de la sphère S' d'équation:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0$$

Déterminer une représentation paramétrique de L.

3°) Déterminer l'équation du cône T de sommet O et de directrice L.

4°) Montrer qu'en tout point de L, S et S' ont le même plan tangent.

EXERCICE II

Dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ on définit, pour tout réel $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ la droite D_u d'équation:

$$x.\sin 3u - y.\cos 3u - 2a\,(\sin u)^3 = 0$$

où a est un réel > 0 donné, et on désigne par E l'enveloppe de la famille (D_u).

1°) Déterminer une représentation paramétrique de E.

2°) Déterminer une équation de E en coordonnées polaires (axe de référence $(0,\vec{i})$). Construire E.

3°) Soit m un nombre réel. Montrer qu'il existe trois points de E où la tangente à E a pour pente m.
Posant $\alpha = \frac{1}{3}$ Arc tg m, exprimer en fonction de α les angles polaires de ces points.

4°) Soit G_m le barycentre des trois points définis ci-dessus, affectés de coefficients égaux. Montrer que G_m est indépendant de m.

EXERCICE III.

1°) Dans un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$ on désigne par $K_{a,b}$ l'ensemble:

$$K_{a,b} = \left\{ (x,y) \;/\; x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ |x| < b,\ |y| \leqslant b \right\},$$

où a et b sont des réels $\geqslant 0$ donnés.

Représenter les diverses formes possibles de $K_{a,b}$. Préciser, dans chaque cas les axes de symétrie de $K_{a,b}$.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE D'ARTS ET METIERS

Soit $\sigma_{a,b}$ la mesure de l'aire de $K_{a,b}$. Calculer $\sigma_{a,b}$ en discutant suivant les valeurs relatives de a et b.

2°) Dans un espace affine euclidien de dimension 3 rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points A,B,C,D de coordonnées respectives (1,1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1) et (1,-1,1).

On désigne par Q le solide intérieur à la fois à la pyramide P (de sommet O et de base le carré ABCD) et à la sphère S (de centre Ω de coordonnées $(0,0,\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$).

Pour $0 \leqslant z \leqslant 1$, calculer la mesure m(z) de l'aire de la section de Q par le plan de cote z.

La fonction $m : z \longrightarrow m(z)$ est-elle continue?

EXERCICE IV.

Soit f l'application de R dans R, périodique de période 2π, définie par:

$$f(x) = x \text{ pour } 0 \leqslant x < 2\pi$$

1°) Sans calculer les coefficients de Fourier de f, préciser la somme de la série de Fourier de f. On indiquera soigneusement le théorème utilisé.

2°) On désigne par $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ le terme général de la série de Fourier de f. Calculer a_0, a_n et b_n.

3°) On pose: $s_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin \frac{k\pi}{n+1}$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \pi - 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

4°) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette limite en utilisant le développement en série entière du sinus.

EXERCICE V.

On considère le système différentiel où y et z sont des fonctions inconnues de la variable réelle x:

$$(1)\quad \begin{cases} y' = -2z \\ xz' = 2xy - z \end{cases}$$

1°) On recherche une solution de (1) telle que y(0) = 1, z(0) = 0, sous la forme:

$$(2)\qquad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) doivent vérifier les relations de récurrence:

$$ka_k = -2b_{k-1}\ ,\ (k+1)\,b_k = 2a_{k-1}\ ,\ a_0 = 1\ ,\ b_0 = 0.$$

2°) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n). En déduire les valeurs de a_{2n} et a_{2n+1}, puis de b_{2n} et b_{2n+1}.

Préciser les rayons de convergence des séries (2).

3°) Pour tout entier $k \geqslant 0$ on pose $I_k = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2k}\,d\theta$.

Etablir une relation entre I_k et I_{k-1} (on pourra étudier $I_k - I_{k-1}$)

Calculer I_k en fonction de k.

4°) Déduire de ce qui précède que tout $x \in \mathbb{R}$ on a:

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(2x\sin\theta)\,d\theta.$$

On justifiera brièvement mais soigneusement la légitimité des calculs effectués.